平成 13 年 11 月 21 日

アスペリティモデルとクラックモデルの関係

入倉孝次郎・三宅弘恵 (京都大学防災研究所)

1. はじめに

本論では，アスペリティモデルとクラックモデルの短周期レベル(加速度震源スペクトルのフラットレベル)および長周期レベル(地震モーメント)の評価を Boatwright (1988)に基づいて行い，壇・他(2001)によって提唱されているアスペリティの式を用いた応力降下量の推定方法と入倉・三宅(2000)が提案したレシピにおける応力降下量の推定方法の関係をまとめる．

入倉･三宅(2000)の提案している計算方法は実際には多重アスペリティモデルではなくて多重クラックモデルと呼ぶべきものである．一方，壇・他(2001)の方法はアスペリティでの応力降下量の与え方など，Das and Kostorv (1986)に基づいたアスペリティモデルを導入しているが，個々の要素断層のすべり量と実効応力の関係に Brune (1970)の式を用いており、部分的にω^2 model を前提とするクラックモデルの考えが混入しているいるように見える．

ここでは，Boatwright (1988)と同様に，Das and Kostrov (1986)による動力学震源モデルに基づいた単一円形アスペリティモデルを用いて短周期レベルおよび長周期レベルの関係を表現し,そしてそれらの関係を 1 つの円形断層内に複数の円形アスペリティが存在する場合に拡張して多重アスペリティモデルに対する短周期および長周期レベルの関係の定式化を行った．その結果,総地震モーメント M_0 を一定とし，アスペリティの面積の総和 S_a も一定とすると，アスペリティを 1 つとしても複数に分割しても，アスペリティ部分の応力降下量は一定となり，短周期レベルも一定となることが分かった．この関係は，アスペリティでのみ応力降下が生じ背景領域では応力降下がないことを前提としたとき，壇・他(2001)による方法が有効なことを意味している．

一方で地震時の震源断層過程は必ずしも Das and Kostrov (1986)のアスペリティモデルのように単純化された応力降下の分布は成り立っておらず，実際には，波形インバージョン結果に基づいて構築された総地震モーメントとアスペリティ面積やそこでのすべり量などの経験的関係式は Das and Kostrov (1986)の仮定したモデルを満足していない．したがって，特性化震源モデルを構築するには Das and Kostrov (1986)のモデルのモディフィケーションが必要となる．

以下に，Boatwright (1988)に基づいて断層面に 1 個のアスペリティが存在するときのアスペリティモデルとクラックモデルの関係,および複数のアスペリティが存在するときの多重アスペリティモデルとクラックモデルの関係を整理し,特性化震源モデルを構築する手続きについて述べる．

アスペリティモデルとクラックモデルの関係

本論では,
短周期レベルとして加速度震源スペクトルのフラットレベル $A(\omega \to \infty) = A_0$
長周期レベルとして地震モーメント $M(\omega \to 0) = M_0$
を考える.
また,全破壊域およびその中に存在するアスペリティを共に円形と仮定し,
全破壊域 $S = \pi R^2$,アスペリティの面積 $S_a = \pi a^2$ の条件を常に満たすものとする.

1. 破壊域内に単一アスペリティを想定した場合

a. 単一アスペリティモデル

Das and Kostrov (1986)と同様に,応力を負担しない($\Delta\sigma = 0$)半径 R の円形の背景領域の中に半径 a(a<<R)の単一のアスペリティ(応力降下量$\Delta\sigma_a$)からなるモデル(総地震モーメント M_0)を考える.

<u>単一アスペリティモデルの短周期レベルと単一アスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_a$ の関係</u>
加速度観測スペクトル$\ddot{u}$ (ω)と加速度震源スペクトル $A_0(\omega)$の関係は

$$\ddot{u}(\omega) = \frac{R_{\theta\phi}}{4\pi\rho\beta^3 r} A_0(\omega) \cdot P(\omega) \cdot G(\omega) \tag{1}$$

で示される.ここで P(ω)は伝播経路特性スペクトル,G(ω)は地盤増幅特性スペクトル,r は震源距離を意味する.

一方,1 個のアスペリティを想定した時に生じる加速度観測スペクトルのフラットレベルは Boatwright (1988)より

$$\ddot{u} = \frac{R_{\theta\phi}}{\rho\beta^2 r} v_R \Delta\sigma_a a \tag{2}$$

と書き表される.(2)式では伝播経路特性スペクトル P(ω)と地盤増幅特性スペクトル G(ω)は1であると見なすことができる.従って 1 個のアスペリティからなる震源モデルからの短周期レベルは

$$A^1_{0asperity} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_a a \tag{3}$$

となる.
(3)式より導出されるアスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_a$は

$$\Delta\sigma_a = \frac{A^1_{0asperity}}{4\pi\beta v_R a} \tag{4}$$

となる.

単一アスペリティモデルの長周期レベルと単一アスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_a$の関係

1個のアスペリティからなる震源モデルの長周期レベル(地震モーメント)は Boatwright (1988) に従うと以下の値をとる．

$$M_0^1 = \frac{16}{7}\Delta\sigma_a a^2 R \tag{5}$$

近似の仕方の相違のため，上式の係数は壇・他(2001)と係数が若干異なるが，(壇・他(2001)では$M_0^1 = \dfrac{18}{7}\Delta\sigma_a a^2 R$)，値自体はほぼ同じとみなして良い．

アスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_a$は(5)式より

$$\Delta\sigma_a = \frac{7}{16}\frac{M_0^1}{a^2 R} \tag{6}$$

となる．

Somerville *et al.* (1999)の経験的関係式を与えた場合に推定される応力降下量

アスペリティの総面積と全破壊域の関係および全破壊域と地震モーメントの関係,

すなわち $S_a = 0.22$ S および $S(km^2) = 2.23\times10^{-15}\times M_0^{2/3}$ (dyne-cm)を代入すると

$\Delta\sigma_a = 9.5$ MPa となる。

b．単一アスペリティに等価な単一クラックモデル

単一クラックモデルの短周期レベルと単一クラックの応力降下量$\Delta\sigma_c$の関係

(1)〜(3)式の導出に従い

$$A_{0crack}^1 = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_c a \tag{7}$$

(7)式より導出されるのクラックの応力降下量$\Delta\sigma_c$は

$$\Delta\sigma_c = \frac{A_{0crack}^1}{4\pi\beta v_R a} \tag{8}$$

となる．

単一クラックモデルの長周期レベルと単一クラックの応力降下量$\Delta\sigma_c$の関係

Eshelby (1957)より,

$$M_{0crack}^1 = \frac{16}{7}\Delta\sigma_c a^3 \tag{9}$$

が得られる．

ここで，単一のアスペリティを半径 a の単一円形クラックに置き換えて応力降下量$\Delta\sigma_c$を見積もる。

(9)式から$\Delta\sigma_c$は

$$\Delta\sigma_c = \frac{7}{16}\frac{M^1_{0crack}}{a^3} = \frac{7\pi^{3/2}}{16}\frac{M_{0a}}{S_a^{\ 3/2}} \tag{10}$$

ここで、S_aはアスペリティ部分の面積、M_{0a}はアスペリティ部分からのモーメント解放量を示す.

Somerville *et al.* (1999)の経験的関係式を与えた場合に推定される応力降下量

スペリティの総面積と地震モーメントの関係およびアスペリティ部分と全破壊域における地震モーメントの関係,

$S_a(km^2) = 5.00\times10^{-16}\times M_0^{2/3}$(dyne-cm) および $M_{0a} = 0.44M_0$ を上式に入れると

$\Delta\sigma_c = 9.64$ MPa　となる.

単一アスペリティの場合、アスペリティを単一円形クラックと想定して応力降下量を見積もっても，単一アスペリティモデルから推定される応力降下量にほぼ対応することがわかる。
したがって、アスペリティを単一円形クラックと仮定して見積もられる応力降下量から計算される短周期レベルおよび長周期レベルは単一アスペリティモデル(Das and Kostrov, 1986)に基づく短周期および長周期レベルとほぼ同じ値となる。

2. 破壊域内に複数のアスペリティを想定した場合

a. 多重アスペリティモデル (multi-asperity model)

N 個に分割されたアスペリティの総面積は，単一アスペリティの面積 S_a と等しいとする.

$$a = \left[\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right]^{1/2} \therefore S_a = \sum_{i=1}^{N} S_{ai}, \pi a^2 = \sum_{i=1}^{N}\pi a_i^2 \tag{11}$$

<u>多重アスペリティモデルの短周期レベルと多重アスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_{ai}$の関係</u>

N 個のアスペリティからの短周期レベルは random summation によって求められる.

$$A^N_{0\ asperity} = \left\{\sum_{i=1}^{N}(4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{ai} a_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 4\pi\beta v_R a\left\{\sum_{i=1}^{N}(\Delta\sigma_{ai})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

個々のアスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_{ai}$が同じと仮定すると

$$A^N_{0\ asperity} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{ai} a \tag{13}$$

となり，(3)式と(13)式の比較から

$$\frac{A^N_{0\ asperity}}{A^1_{0asperity}} = \frac{\Delta\sigma_{ai}}{\Delta\sigma_a} \tag{14}$$

の関係が得られる.

多重アスペリティモデルの長周期レベルと多重アスペリティの応力降下量$\Delta\sigma_{ai}$の関係

N 個のアスペリティからなる震源モデルの長周期レベルは Boatwright (1988)に基づいて coherent summation によって求められる．

$$M_0^N = \frac{16}{7}\sum_{i=1}^{N}\Delta\sigma_{ai}a_i^2 R_i \qquad (15)$$

ここで R_i は Boatwright (1988)の定義に従うと slip radius と呼ばれるもの．ここではアスペリティ a_i は破壊域の任意の位置で定義されているので, $R_i = R$ としてもよい(アスペリティが常に破壊域の中央と定義されていると $R_i = 3/2\ R$ となる).

個々のアスペリティの応力降下量がすべて同じと仮定すると

$$M_0^N = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{16}{7}\Delta\sigma_{ai}a_i^{\,2}R_i\right) = \frac{16}{7}a^2R_i\sum_{i=1}^{N}(\Delta\sigma_{ai}) = \frac{16}{7}\Delta\sigma_{ai}a^2R \qquad (16)$$

従って(5)式と(16)式から

$$\frac{M_0^N}{M_0^1} = \frac{\Delta\sigma_{ai}}{\Delta\sigma_a} \qquad (17)$$

となる．

以上をまとめると、

$$\frac{\Delta\sigma_{ai}}{\Delta\sigma_a} = \frac{A_{0\ asperity}^N}{A_{0asperity}^1} = \frac{M_0^N}{M_0^1} \qquad (18)$$

となり，この関係はアスペリティの総面積が一定である限り，分割アスペリティの面積の大きさに依らず常に成立する．

なお多重アスペリティモデルにおける個々のアスペリティの応力降下量は

$$\Delta\sigma_{ai} = (\Delta\sigma_a =)\frac{7}{16}\frac{M_0^1}{a^2R} \qquad (19)$$

従って，もし与条件がアスペリティの数によらず地震モーメント一定，すなわち $M_0^N = M_0^1$ とすると，(17)式から $\Delta\sigma_{ai} = \Delta\sigma_a$，そして(14)式から $A_{0\ asperity}^N = A_{0asperity}^1$

逆にもし与条件が短周期レベル一定とするならば，すなわち $A_{0\ asperity}^N = A_{0asperity}^1$ とすると，(14)式から $\Delta\sigma_{ai} = \Delta\sigma_a$，そして(17)式から $M_0^N = M_0^1$.

Somerville *et al*. (1999)の経験的関係式を与えた場合に推定される応力降下量

単一アスペリティモデルの場合に得られた応力降下量と(18)式の関係から

$\Delta\sigma_{ai}$ = 9.5 MPa　となる.

b. 多重クラック・モデル（multi-crack model）

<u>短周期レベル(random summation)</u>

$$A_{0\ crack}^{N} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} (4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{c\,i} a_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{c\,i} \left\{ \sum_{i=1}^{N} (a_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{c\,i} a \quad (20)$$

$$\frac{A_{0\ crack}^{N}}{A_{0crack}^{1}} = \frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\Delta\sigma_c} \quad (21)$$

<u>長周期レベル(coherent summation)</u>

$$M_{0\ crack}^{N} = \sum_{i=1}^{N} (\frac{16}{7} \Delta\sigma_{c\,i} a_i^{\ 3}) = \frac{16}{7} \Delta\sigma_{c\,i} \sum_{i=1}^{N} (a_i^{\ 3}) = \frac{1}{\alpha} \frac{16}{7} \Delta\sigma_{c\,i} a^3 \quad (1 < \alpha < \sqrt{\mathrm{N}}) \quad (22)$$

$$\frac{M_{0\ crack}^{N}}{M_{0crack}^{1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\Delta\sigma_c} \quad (23)$$

分割アスペリティの面積が全て等しい場合は$\alpha = \sqrt{\mathrm{N}}$ となる．
以上より，

$$\frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\Delta\sigma_c} = \frac{A_{0\ crack}^{N}}{A_{0crack}^{1}} = \alpha \frac{M_{0\ crack}^{N}}{M_{0crack}^{1}} \quad (24)$$

の関係が導かれる．

Somerville et al. (1999)の経験的関係式を与えた場合に推定される応力降下量

単一クラックモデルの場合に得られた応力降下量と(24)式の関係から

$\Delta\sigma_{ci} = \alpha \times 9.64$ MPa　となる．

多重アスペリティモデルに等価な多重クラックモデルとしての計算

レシピから与えられる与条件は、

巨視的パラメータとして、全破壊域 S と総地震モーメント M_0、

微視的パラメータとして、アスペリティの総面積 S_a、すなわち S_a＝0.22 S。

アスペリティモデルに等価なクラックモデルを設定するため、

個々のクラックの応力降下量$\Delta\sigma_{c\,i}$は単一クラックを想定したときの応力降下量$\Delta\sigma_c$に等しい，

すなわち$\Delta\sigma_{c\,i} = \Delta\sigma_c$と仮定すると

短周期レベルは

$$A_{0\ asperity}^{N} = A_{0\ crack}^{N} \quad (25)$$

また，すべてのクラックからの長周期レベルは

$$M_{0\ crack}^{N}=\frac{1}{\alpha}\frac{a}{R}M_{0} \tag{26}$$

となる。

背景領域の面積$\pi R^2-\pi a^2$からの地震モーメント M_{0b} として

$$M_{0b}=(1-\frac{1}{\alpha}\frac{a}{R})M_{0} \tag{27}$$

を与えると、総地震モーメント M_0 を満足するモデルとなる。

しかしながら、このとき、Somerville *et al*. (1999)によって経験的に与えられる関係式の１つ $M_{0a}=0.44M_0$ は満足されない。

多重クラックモデルとしての計算

レシピから与えられる与条件は、

巨視的パラメータとして、全破壊域 S と総地震モーメント M_0、

微視的パラメータとして、アスペリティの総面積 S_a、すなわち S_a＝0.22 S、およびアスペリティ領域からモーメント解放量 $M_{0a}=0.44M_0$。

アスペリティ領域からモーメント解放量をアスペリティの数に依らず一定、すなわち、

$M_{0\ asperity}^{N}=M_{0\ crack}^{N}$ とすると、

$$\Delta\sigma_{c\,i}=\alpha\Delta\sigma_{c} \tag{28}$$

となる。すなわち、1 個のクラックを総モーメント解放量を保ったまま複数のクラックに分割すると個々のクラックの応力降下量は大きくなる。

その結果生じる短周期レベルは

$$A_{0\ crack}^{N}=\alpha A_{0crack}^{1} \tag{29}$$

となり、当然大きくなる。

背景領域の面積$\pi R^2-\pi a^2$からの地震モーメント M_{0b} として

$$M_{0b}=M_{0}-M_{0\ crack}^{N} \tag{30}$$

とすると、総地震モーメント M_0 を満足するモデルとなる。

上記の多重震源モデルは、Somerville *et al*.(1999)で与えられる微視的パラメータの 2 つの経験的関係式 S_a＝0.22 S、および $M_{0a}=0.44M_0$ をともに満足している。

アスペリティ・モデルとクラック・モデル

Case 1　単一アスペリティを想定

アスペリティ

短周期レベル　$A^1_{0asperity} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_a a$

長周期レベル　$M^1_0 = \frac{16}{7}\Delta\sigma_a a^2 R$

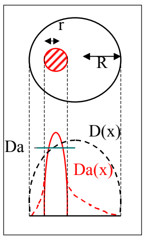
応力降下量　Δσa = (7/16) $M_0/(Rr^2)$

クラック

短周期レベル　$A^1_{0crack} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_c a$

長周期レベル　$M^1_{0crack} = \frac{16}{7}\Delta\sigma_c a^3$

応力降下量　$\Delta\sigma_c = \frac{7\pi^{3/2}}{16}\frac{Mo_a}{S_a^{3/2}}$



r<<R

単一アスペリティのΔσ(=9.5MPa) =単一クラックのΔσ(=9.6MPa)

アスペリティ・モデルとクラック・モデル

Case 2　複数のアスペリティを想定

多重アスペリティモデル

短周期レベル　$A^N_{0\ asperity} = \left\{\sum_{i=1}^{N}(4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{ai} a_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{ai} a$

長周期レベル　$M^N_0 = \sum_{i=1}^{N}(\frac{16}{7}\Delta\sigma_{ai} a_i^2 R_i) = \frac{16}{7}\Delta\sigma_{ai} a^2 R$

応力降下量　$\Delta\sigma_a = \Delta\sigma_{ai} = \frac{7}{16}\frac{M^1_0}{a^2 R}$

多重クラックモデル

短周期レベル　$A^N_{0\ crack} = \left\{\sum_{i=1}^{N}(4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{ci} a_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 4\pi\beta v_R \Delta\sigma_{ci} a$

長周期レベル　$M^N_{0\ crack} = \sum_{i=1}^{N}(\frac{16}{7}\Delta\sigma_{ci} a_i^3) = \frac{1}{\alpha}\frac{16}{7}\Delta\sigma_{ci} a^3 \quad (1 < \alpha < \sqrt{N})$

応力降下量　$\frac{\Delta\sigma_{ci}}{\Delta\sigma_c} = \frac{A^N_{0\ crack}}{A^1_{0crack}} = \alpha\frac{M^N_{0\ crack}}{M^1_{0crack}}$

アスペリティ・モデルとクラック・モデル

Case 2　複数のアスペリティを想定

断層総面積と地震モーメントの式・*Sa=ΣSi=0.22S*

アスペリティと等価なクラックモデル

シナリオ1

$\Delta\sigma_{crack} = \Delta\sigma_{asp}$

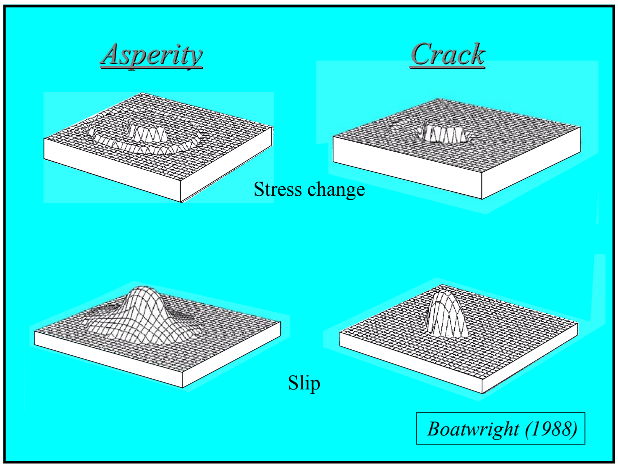
Moasp ≒ 0.44Mo

クラックの式を使って応力降下量を計算

シナリオ2

$\Delta\sigma_{crack} = \alpha\Delta\sigma_{asp}$

Moasp = 0.44Mo



Boatwright (1988)